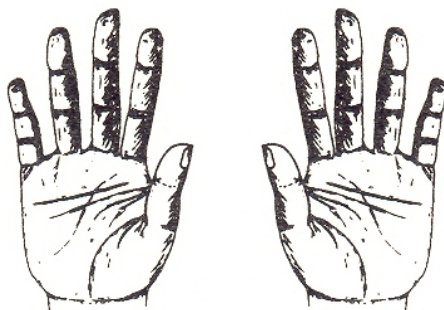


# 1

## Oneindig

### Tellen

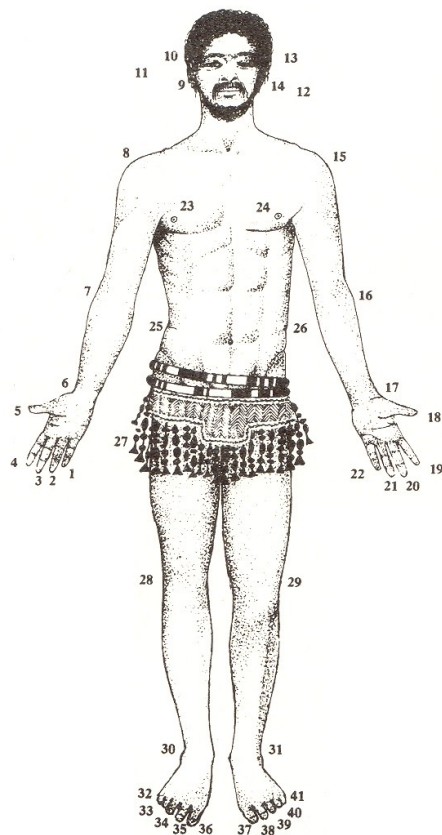
Leren tellen is een moeizaam proces. Dat kan iedereen met kleine kinderen vaststellen. Het duurt een aantal jaar voordat een kind met één blik kan zien dat er drie knikkers op tafel liggen. Welk gedachtestappen zijn daarvoor nodig en hoe wordt de vaardigheid om te tellen vertaald in de wiskunde, waar de natuurlijke getallen aan de basis van alles liggen?



Primitieve culturen hebben in het algemeen een zeer eenvoudig telsysteem. Soms telt men niet verder dan vier. Men begint het tellen met de begrippen ‘één’ en ‘twee’ – alleen of samen. Vervolgens ontstaat ‘drie’, vaak als de som  $1 + 2$  en eindigt men bij ‘vier’, benoemd en soms ook geschreven als  $2 + 2$ . Daarna wordt er geen onderscheid gemaakt tussen de aantallen groter dan vier. Het is allemaal ‘veel’. In deze karikatuur van ons getallensysteem verliezen we de belangrijkste eigenschap van tellen, namelijk dat het nooit ophoudt, dat er oneindig veel natuurlijke getallen zijn. In zo’n ‘primitief’ systeem gaat tellen eenvoudig van

*1, 2, 3, 4, veel.*

Toch is men zelfs met zo’n elementair getalbegrip in staat om in de dagelijkse praktijk met veel grotere getallen om te gaan. Dat kan bijvoorbeeld door handig gebruik te maken van lichaamsdelen zoals vingers, tenen, ellebogen en knieën. Door creatief genoeg te zijn in het vinden van te onderscheiden lichaamsonderdelen telt men zo in sommige Polynesische culturen gemakkelijk tot over de veertig.



Ook al is er geen apart woord voor ‘vijf’, je kan op deze wijze toch vaststellen dat bijvoorbeeld het aantal gezinsleden precies op de vingers van één hand te tellen is. Preciezer gezegd, er kan worden vastgesteld dat twee verzamelingen, namelijk enerzijds de vingers aan een hand en anderzijds het aantal leden van het gezin, één op één met elkaar in verband kunnen worden gebracht. Beide bevatten precies evenveel elementen. Dat is een belangrijke les. In veel praktische gevallen is het van groter belang te weten of twee aantallen gelijk zijn, dan het precieze aantal te weten of te kunnen benoemen.

Nog een praktijkvoorbeeld. Zeg men leeft in een clan van 26 mensen. Maar er bestaat in de gesproken taal geen woord ‘zesentwintig’ voor dit aantal, het is gewoon ‘veel’. Als het er 27 waren geweest, had dit precies hetzelfde aangevoeld. Misschien zoals wij ons nu voelen in een voetbalstadium, waar het totale aantal toeschouwers ons ook ontgaat. Toch kan men nagaan of ’s avonds iedereen weer veilig terug in de groep is. ’s Ochtends legt iedereen een balletje in een kom en ’s avonds neemt men dat balletje er weer uit. Het aantal balletjes dat overblijft is dan het aantal missende personen. Als alle balletjes uit de kom zijn genomen is vastgesteld dat alle 26 personen weer aanwezig zijn, zonder dat het getal 26 ooit

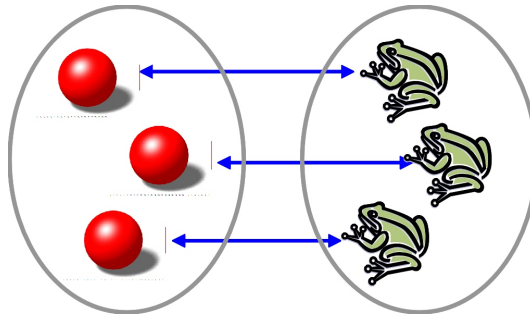
expliciet is gemaakt. Er is alleen vastgesteld dat er precies evenveel balletjes als veilig teruggekeerde groepsleden zijn.

Een ander voorbeeld, meer uit onze alledaagse ervaring. Je stapt in de bus en kijkt of er een plaats is. Als je geen vrije stoel ziet heb je vastgesteld dat er precies evenveel passagiers in de bus zitten als er stoelen zijn. Maar het aantal stoelen of passagiers weet je niet precies. Wederom is het voldoende een correspondentie gevonden te hebben tussen het aantal stoelen en het aantal reizigers.

We zijn hier bij het kernbegrip van dit hoofdstuk aangeland: de correspondentie tussen de elementen van twee verzamelingen, bijvoorbeeld ‘groepsleden’ en ‘balletjes’, of ‘buspassagiers’ en ‘stoelen’. Technisch spreken we dan van een *bijectie*.

*Een bijectie tussen twee verzamelingen  $X$  en  $Y$  is een afbeelding die aan ieder element van  $X$  precies één element van  $Y$  toevoegt en vice versa.*

Hier is bijvoorbeeld een bijectie tussen een verzameling knikkers en een verzameling kikkers.



Als we praten over eindige verzamelingen is het duidelijk dat er alleen zo'n bijectie kan bestaan als het aantal elementen in  $X$  en  $Y$  hetzelfde is. Dat wil zeggen, voor het bestaan van een bijectie is het noodzakelijk dat  $X$  en  $Y$  even groot zijn.

We kunnen de redenering ook omdraaien en beweren dat uit deze bijecties van concrete verzamelingen de abstracte getallen ontstaan. Er zijn allerlei verzamelingen om ons heen en deze vallen uiteen in categorieën van verzamelingen waarvan we kunnen vaststellen dat ze even groot zijn. We kunnen nu afspreken dat we twee verzamelingen, vanuit een bepaald perspectief, als identiek beschouwen als ze evenveel elementen hebben. Dat wil zeggen, we kijken door een zeer grove bril waarbij we alleen oog hebben voor het aantal elementen en verder niet geïnteresseerd zijn in het wat en hoe van de elementen. Daarmee vallen allerlei verzamelingen samen, zeg de verzameling van ‘drie knikkers’, ‘drie kikkers’, ‘drie appels’ etc. Al deze verzamelingen hebben ‘drie’ als een gemeenschappelijke verbindende factor.

Dit leidt tot een abstractie, ‘de verzameling met drie elementen’. Deze ‘equivalentieklasse’ van verzamelingen kunnen we nu met een abstract symbool weergeven. Hiertoe kiezen we het symbool 3 en we spreken dit uit als ‘drie’! Een

blik op een telboek voor kleuters leert ons dat dit inderdaad de manier is hoe we een getal leren, namelijk als het gemeenschappelijke van allerlei verzamelingen. Door het kind genoeg te laten oefenen met concrete voorbeelden ontstaat langzamerhand het abstracte en overkoepelende getalsbegrip.

### De duiventil

Er zijn altijd minstens twee Amsterdammers met evenveel haren op hun hoofd. Dit volgt uit het duiventil of *pidgeon hole* principe dat is gebaseerd op de kennis dat een verzameling groter is dan een ander, zonder precies te weten hoeveel groter.

Als er vijf duiven zijn, maar slecht drie hokjes in de duiventil, en alle duiven moeten een slaapplek in de til zoeken, dan weten we zeker dat er minstens twee duiven een hokje moeten delen. Er zijn immers meer duiven dan hokjes. Dit eenvoudige inzicht van de stoelendans geeft aanleiding tot het volgende algemene principe.

*DUIVENTILPRINCIPE. Als we  $p$  objecten in  $q$  dozen doen met  $p > q$ , dan is er minstens één doos met twee objecten.*

Meer formeel gezegd: als we een afbeelding  $f$  hebben tussen twee (zeg, eindige) verzamelingen  $X$  en  $Y$ , en als  $X$  meer elementen bevat dan  $Y$ , dan kan de afbeelding  $f$  niet alle elementen van  $X$  naar verschillende elementen van  $Y$  sturen. Er is dus twee verschillende elementen  $x$  en  $x'$  in  $X$  met  $f(x) = f(x')$ .

In het eerste voorbeeld is  $X$  de verzameling van alle Amsterdammers en  $Y$  de eerste  $N$  natuurlijke getallen, waarbij  $N$  het maximaal aantal mogelijke haren is dat biologisch gesproken op een mens kan groeien.  $X$  bevat zo'n miljoen elementen. Een zeer conservatieve schatting (uitgaande van het model Neanderthaler) geeft dat  $N$  niet groter kan zijn dan een paar honderdduizend. (Een gemiddelde Nederlander heeft zo'n 120 duizend hoofdharen.)

### Oneindig

We vinden de mens die '1, 2, 3, 4, veel' telt primitief. Maar hoe tellen wij dan? Wij tellen 1, 2, 3, 4, 5, ... Hier staan de ... voor een oneindige reeks getallen. Er komt immers geen eind aan de verzameling  $\mathbb{N}$  van natuurlijke getallen. Als  $n$  het laatste en grootste getal zou zijn dan kunnen we altijd een groter getal  $n + 1$  vinden door er één aan toe te voegen. Misschien moeten we dan tellen als

*1, 2, 3, 4, 5, ..., oneindig.*

Daarmee neemt het begrip ‘oneindig’ in zekere zin dezelfde plaats in als het begrip ‘veel’ bij het eenvoudige telsysteem, waar alle getallen boven de vier op een hoop verder geveegd. Op dezelfde wijze noemen we alles wat niet uit een eindig aantal bestaat oneindig.

Er is een rijke ideeëngeschiedenis van het begrip oneindig, zowel in de vorm van oneindig groot als oneindig klein. Denk aan de beroemde paradoxen van Zeno van Elea, zoals Achilles en de schildpad, en de vliegende pijl, die nooit vooruit kan komen omdat deze op ieder tijdstip stilstaat. Het is erg gemakkelijk om jezelf in de knoop te draaien als je niet voorzichtig met een oneindig grote verzameling omgaat.

Inderdaad, zoals we nog uitgebreid zullen zien, de kenmerkende, paradoxale eigenschap van oneindige verzamelingen is dat zo’n verzameling een (eigenlijke) deelverzameling toestaat die “even groot” als de oorspronkelijke verzameling.

Andere wiskundigen die belangrijke bijdragen hebben geleverd zijn Aristoteles en veel later in de negentiende eeuw de Tsjechische wiskundige Bernard Bolzano (1781–1848). Deze laatste compileerde een groots overzicht van allerlei paradoxale aspecten van het begrip oneindig, *Paradoxien des Unendlichen* (1851). In dit boek werd het begrip verzameling voor het eerst gebruikt (een begrip dat wij hier stilzwijgend als, op z’n minst intuïtief, bekend veronderstellen). Ook was hij de eerste die de methode van de bijcties uitbreidde naar oneindige verzamelingen.



Maar de werkelijke bedwinger van dit lastige onderwerp en de grote held van dit hoofdstuk is de Duitse wiskundige Georg Cantor (1845–1918). Cantor was een onomstreden genie. Hij heeft als geen andere onze blik op de wereld van het oneindige vergroot. Hij heeft in wezen de lont in het kruitvat van de moderne wiskunde gestoken, zoals we later zullen zien.

### Verschillende soorten oneindig?

Er zijn veel verzamelingen met oneindig veel elementen. Denk aan de natuurlijke getallen  $\mathbb{N}$ , of het aantal punten van een lijn of een vlak, of het aantal mogelijke manieren waarop we een kromme in een vlak kunnen tekenen. Moeten we die allemaal als even groot beschouwen, allemaal even oneindig? Of zijn we dan als de primitieve cultuur die beweert dat  $5 = 6 = 7 = \text{veel}$ .

Uiteindelijk is het Cantor geweest die inzag dat dit laatste inderdaad het geval is. Dat er vele verschillende soorten oneindig zijn die we allemaal kunnen onderscheiden als we ons begrip maar verfijnd genoeg maken. Het is zelfs zo dat er oneindig veel verschillende soorten oneindig zijn, waarbij men zich weer kan afvragen hoe oneindig veel dan!

We zijn dus op een punt aangeland dat we het veel preciezer begrippen apparaat van de wiskunde moeten gaan gebruiken omdat ons gezond verstand ons hier in de steek laat. Cruciaal daartoe is weer het begrip bijectie, een afbeelding tussen twee verzamelingen die de elementen één aan één relateert. Bijecties kunnen ook bestaan tussen oneindig grote verzamelingen, en ook al kunnen we het aantal elementen niet meer tellen, we kunnen nog steeds vaststellen dat het er evenveel zijn. Ons uitgangspunt zal dan ook de volgende definitie zijn.

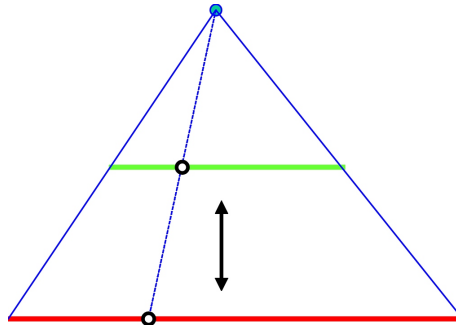
*Twee verzamelingen  $X$  en  $Y$  hebben ‘evenveel’ elementen als er een bijectie  $X \leftrightarrow Y$  bestaat.*

We zeggen dat  $X$  en  $Y$  dezelfde *cardinaliteit* hebben en schrijven  $|X| = |Y|$ .

Laten we eerst nog wat concrete voorbeelden geven van oneindige verzamelingen. Ons eerste voorbeeld was de verzameling  $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \dots\}$  van natuurlijke getallen. Dit is in ieder opzicht het eenvoudigste en belangrijkste voorbeeld. Een gerelateerd voorbeeld is  $\mathbb{N}^2$ , de verzameling van paren natuurlijke getallen zoals  $(1, 1)$ ,  $(1, 2)$ ,  $(35, 276)$  etc. Andere bekende oneindige verzamelingen zijn de gehele getallen  $\mathbb{Z}$  bestaande uit alle positieve en negatieve gehele getallen inclusief nul, en  $\mathbb{Q}$  de breuken of rationale getallen, dat wil zeggen alle getallen van de vorm  $\frac{a}{b}$  met  $a, b$  geheel.

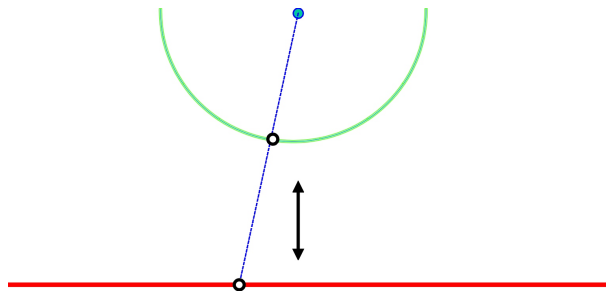
Een belangrijke oneindig grote verzameling met een geheel ander karakter dan de vorige voorbeelden is de reële lijn  $\mathbb{R}$ . De oneindig lange lijn bestaat uit alle reële getallen en we kunnen ons afvragen hoeveel punten de lijn bevat. Hier komen we al direct voor een verrassing te staan. Stel we bekijken een eindig lijnstukje, zeg het interval  $(0, 1)$  dat alle punten  $x$  bevat met  $0 < x < 1$ . Stel dat we dit interval in tweeën knippen en alleen de onderste helft  $(0, \frac{1}{2})$  behouden. Liggen er minder punten op het halve interval  $(0, \frac{1}{2})$  dan op het hele interval  $(0, 1)$ ? Hiertoe moeten we twee oneindige verzamelingen vergelijken. Intuïtief zijn er tweemaal zoveel punten op het lange interval dan het korte interval, maar hoeveel is tweemaal oneindig?

Als we bovenstaande definitie gebruiken komen we tot de onherroepelijke conclusie dat het aantal punten op beide intervallen gelijk moet zijn. Het is niet moeilijk de gevraagde bijectie te maken. We geven de constructie in een figuur weer:



Hier projecteren we de punten van het korte interval één op één op die van het lange interval en stellen vast dat er daarom evenveel punten liggen op het korte als het lange interval. Het is duidelijk dat we deze constructie kunnen herhalen voor intervallen van willekeurige lengte. We komen dus tot de conclusie dat alle intervallen dezelfde cardinaliteit hebben.

Maar hoe zit het met de oneindig lange rechte  $\mathbb{R}$  zelf? Verrassend genoeg bevat deze evenveel punten als een interval. Ook dit kan het beste grafisch worden uitgelegd met een kleine variatie van de bovenstaande projectie. We buigen het interval tot een halve cirkel en projecteren nu vanuit het middelpunt de punten van deze cirkelboog op de lijn.



We hebben hier te maken met een verzameling waarvan onderdelen ‘even groot’ kunnen zijn als het geheel. Dit kan duidelijk alleen als de verzameling oneindig is, en dat is een verschijnsel dat we nog vaker zullen tegenkomen.

Er zijn nog ‘wildere’ voorbeelden van oneindig grote verzamelingen te bedenken. Bijvoorbeeld de verzamelingen van alle deelverzamelingen van het vlak. Als we de punten die in de deelverzameling zitten zwart kleuren en de andere punten wit, dan kunnen we hierover nadenken als de verzameling van alle mogelijke tekeningen op een vel papier. We komen hier nog op terug.

### Hilberts hotel

Wat gebeurt er met een oneindig grote verzameling als we daar één extra element aan toevoegen? Is dit de beroemde druppel op de gloeiende plaat?

Deze vraag wordt beantwoord in het befaamde voorbeeld van Hilberts hotel. David Hilbert (1862–1943) was in zijn tijd (ca 1890–1930) absoluut de leidende wiskundige in de wereld. Vanuit het slaperige Duitse universiteitsstadje Göttingen, toen het centrum van het wiskundig universum, bestreek hij alle gebieden van de wiskunde. We zullen hem nog uitvoerig tegenkomen als we komen te spreken over de problematiek rond de fundamenteën van de wiskunde.



Om de merkwaardige eigenschappen van het begrip oneindig duidelijk te maken kwam Hilbert met het elegante voorbeeld van een hotel met oneindig veel kamers, ieder genummerd met een natuurlijk getal  $n \in \mathbb{N} = \{1, 2, 3, \dots\}$ .

Stel het hotel is volledig volgeboekt. Alle kamers zijn bezet. We kunnen wiskundig gesproken zeggen: er is een bijectie tussen de verzameling kamers en de verzameling gasten. Nu verschijnt er een extra gast. Kunnen we nog plaats vinden voor deze vreemdeling?

De gast beweert van wel. Er is altijd nog een plaats vrij te maken, en wel als volgt. De gast van kamer 1 verhuist naar kamer 2, de gast van kamer 2 verhuist naar kamer 3, enzovoort. Er is dus een simpel algoritme: de gast van kamer  $n$  verhuist naar kamer  $n + 1$ , en dat voor alle  $n$ . Als deze boodschap duidelijk gecommuniceerd wordt en alle gasten tegelijkertijd en gedisciplineerd verkassen, dan kan de hele verhuisoperatie snel geschieden. Zo komt kamer 1 vrij waar de extra gast rustig zijn intrek in kan nemen. Het moge duidelijk zijn dat dit proces nog een flink aantal keren herhaald kan worden. Kan het hotel ooit echt vol zijn? Is er een reisgezelschap dat we niet kunnen plaatsen?

Via de verhuizingsoperatie vinden we dat de verzamelingen  $\{1, 2, 3, \dots\}$  en  $\{2, 3, 4, \dots\}$  dezelfde cardinaliteit hebben. De bijectie die de elementen op elkaar afbeeldt is eenvoudig

$$n \mapsto n + 1.$$

Als we  $\infty$  (Romeins symbool voor 1000) schrijven voor de cardinaliteit van  $\mathbb{N}$



dan hebben we symbolisch de formule

$$\infty + 1 = \infty.$$

Als een verzameling dezelfde cardinaliteit heeft als  $\mathbb{N}$  noemen we deze *aftelbaar oneindig*.

### Hilbert breidt uit

Hilberts hotel is een groot succes, en hij besluit een tweede hotel als dependance te bouwen, ook met aftelbaar oneindig veel kamers. Het is hoogseizoen en beide hotels zijn volledig vol geboekt. Helaas is het tweede hotel door een onbetrouwbare aannemer gebouwd en de inspectie sluit de bouwval met onmiddellijke ingang. Kunnen alle gasten die nu in eens op straat komen te staan geplaatst worden in het eerste hotel, ook al is dat volledig vol?

Jawel, we kunnen genoeg ruimte maken door de gasten als volgt te laten verhuizen. De gast van kamer 1 gaat naar kamer 2, de gast van kamer 2 naar kamer 4, en in het algemeen gaat de gast van kamer  $n$  naar kamer  $2n$ . Na deze actie zijn alleen de even kamers bezet, en zijn alle oneven kamernummers leeg. In deze lege kamers met oneven nummers kunnen nu de gasten van het tweede hotel gehuisvest worden: gast 1 gaat naar kamer 1, gast 2 naar kamer 3, en gast  $m$  verhuist naar kamer  $2m - 1$ .

Daarmee is de inhoud van twee hotels in één hotel geplaatst en Hilbert realiseert zich dat de uitbreiding helemaal niet nodig was geweest. Alle verdere expansieplannen gaan dan ook in de ijskast want het is niet moeilijk in te zien dat op soortgelijke wijze de inhoud van 3, 4, of meer hotels ook in een enkel hotel geplaatst kan worden.

Wat we in dit voorbeeld gezien hebben is dat er in het bijzonder evenveel (positieve) getallen zijn als even getallen. De twee verzamelingen  $\{1, 2, 3, \dots\}$  en  $\{2, 4, 6, \dots\}$  worden op elkaar afgebeeldt via de bijectie

$$n \mapsto 2n.$$

Dit is enigszins tegennatuurlijk omdat intuïtief de even getallen de helft vormen van alle getallen. Symbolisch kunnen we schrijven

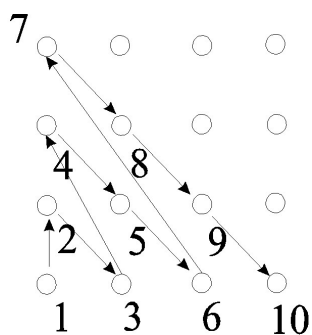
$$2 \cdot \infty = \infty.$$

Maar Hilbert laat het er niet bij zitten. Hij is er nu van overtuigd dat uitbreiding met een *eindig* aantal hotels niet zinvol is, maar hij heeft nu een *oneindige* keten van hotels laten bouwen. Om precies te zijn een aftelbaar oneindig lange keten van hotels, genummerd  $1, 2, 3, \dots$ . Al deze hotels zijn volledig volgeboekt.

De gasten worden nu genummerd door twee natuurlijke getallen. Het paar  $(n, m)$  geeft de gast aan in kamer  $n$  van hotel  $m$ . De verzameling kamers is dus nu  $\mathbb{N}^2$ .

Is het mogelijk dat ook deze expansie een zinloze verspilling van beton is geweest? Kunnen alle gasten van alle hotels weer in één hotel geplaatst kunnen worden? Hiertoe moeten we aantonen dat de verzamelingen  $\mathbb{N}$  en  $\mathbb{N}^2$  even groot zijn.

De methode kan het beste in een figuur worden weergegeven. het is een pad dat langs de diagonalen stelselmatig alle paren afloopt.



Op deze wijze tellen we de paren getallen systematisch af als<sup>1</sup>

$$(1, 1), (1, 2), (2, 1), (1, 3), (2, 2), (3, 1), \dots$$

Op deze wijze hebben we gevonden dat

$$\infty \cdot \infty = \infty,$$

of meer algemeen

$$\infty^n = \infty.$$

### Cantors diagonaalargument

We kunnen ons nu aanvragen of iedere oneindige verzameling altijd aftelbaar is. Dat wil zeggen, bestaat er altijd een bijjectie tussen zo'n oneindige verzameling en de natuurlijke getallen? Dit is niet het geval en het belangrijkste tegenvoorbeeld wordt gegeven door het volgende bijzondere resultaat van Cantor

$$|\mathbb{N}| \neq |\mathbb{R}|$$

Dat wil zeggen: het aantal punten op een lijn is wezenlijk meer oneindig dan het aantal natuurlijke getallen. De lijn is daarmee niet aftelbaar, we zeggen overaftelbaar oneindig.

<sup>1</sup>Voor de lifehebber: laat zien dat gast  $(n, m)$  gaat naar kamer  $\frac{1}{2}(n+m-1)(n+m-2)+n$ .

*Bewijs:* Eerst is het handig via een bijectie de reële rechte  $\mathbb{R}$  af te beelden op het open interval  $(0, 1)$ . We hebben al gezien dat dit gemakkelijk kan.

Hoe moeten we nadenken over een reëel getal in het interval  $(0, 1)$ ? Voor ons bewijs is het nuttig zo'n getal voor te stellen als een (mogelijkerwijs oneindig lange) decimale ontwikkelingen, bijvoorbeeld

$$\pi/4 = 0,78539816339744830961566084581987572104929234984378\dots$$

Alle mogelijke decimale ontwikkelingen (we zouden ook een andertallig stelsel kunnen gebruiken) met een nul voor de komma vormen de elementen van het interval  $(0, 1)$ .

Stel nu dat we een bijectie kunnen vinden tussen het interval  $(0, 1)$  en de verzameling  $\mathbb{N}$ . Daarmee kunnen de elementen in  $(0, 1)$  geordend worden als

$$r_1, r_2, r_3, \dots$$

waarbij  $r_1$  gepaard is met het getal 1,  $r_2$  gepaard is met het getal 2, enzovoorts. Bijvoorbeeld, we zouden kunnen hebben dat de uitkomst van dat hypothetische algoritme gegeven is door

$$\begin{aligned} r_1 &= 0,576596713674550706968\dots \\ r_2 &= 0,132094661820376560843\dots \\ r_3 &= 0,003546100999185442378\dots \\ r_4 &= 0,224319177171656517811\dots \\ r_5 &= 0,174443769154541001011\dots \\ &\dots \end{aligned}$$

Laat nu  $(x)_m$  onze notatie zijn voor de  $m$ -de term in de ontwikkeling van het getal  $x$ , dat wil zeggen het cijfer op de  $m$ -de plaats achter de komma. In deze notatie zal dus  $(r_n)_m$  de  $m$ -de decimaal van het  $n$ -de getal  $r_n$  aangeven. Als we bijvoorbeeld naar bovenstaande ontwikkeling van het getal  $r_3$  kijken dan zien we dat  $(r_3)_5 = 4$  omdat er een 4 staat op de vijfde plaats achter de komma.

Als we al de getallen  $r_1, r_2, r_3, \dots$  onder elkaar zetten krijgen we een oneindig keer oneindige matrix, waar de decimaal  $(r_n)_m$  op de  $n$ -de rij en de  $m$ -de kolom staat. Het eerste stukje van die matrix ziet er als volgt uit (we schrijven alleen de cijfers achter de komma)

5	7	6	5	9
1	3	2	0	9
0	0	3	5	4
2	2	4	3	1
1	7	4	4	4

Nu komt de geniale inval van Cantor. Definieer een reëel getal  $s$  met de eigenschap dat  $n$ -de decimaal van  $s$  alles mag zijn behalve de  $n$ -de decimaal van het getal  $r_n$  in onze lijst,

$$(s)_n \neq (r_n)_n$$

Zo'n getal  $s$  is eenvoudig te maken, er zijn er zelfs (oneindig) veel. Bijvoorbeeld we kunnen  $s$  definiëren door eerst de diagonaal te nemen van de tabel

5	7	6	5	9
1	3	2	0	9
0	0	3	5	4
2	2	4	3	1
1	7	4	4	4

In dit voorbeeld wordt dat het getal

$$0,53334\dots$$

Nu kunnen vervolgens ieder decimaal van dit getal met 1 te verhogen waar we modulo 10 werken, zodat  $9 + 1 = 0$ . Bijvoorbeeld, krijgen we zo

$$s = 0,64445\dots$$

We kunnen nu beweren dat het getal  $s$  een nieuw reëel getal is dat zeker niet op de lijst  $r_1, r_2, r_3, \dots$  staat. Waarom? Hoe dan ook is  $s$  niet gelijk aan  $r_1$ , want het verschilt in ieder geval in de eerste decimaal met  $r_1$ . In ons voorbeeld heeft  $r_1$  daar een 5 staan en in  $s$  hebben we daar een 6 van gemaakt. Verder kan  $s$  ook niet gelijk zijn aan  $r_2$ , want daar verschilt het mee in de tweede decimaal. Meer in het algemeen is Cantors constructie zodanig dat getal  $s$  in ieder geval op de  $n$ -de plaats met het getal  $r_n$  verschilt en het is daarmee ongelijk aan  $r_n$  voor alle  $n \in \mathbb{N}$ .

Het getal van Cantor staat dus niet in de lijst. Maar aangezien het wel een element is van het interval  $(0, 1)$ , hebben we aangetoond dat het niet mogelijk is een bijectie  $\mathbb{N} \rightarrow (0, 1)$  te vinden. Iedere mogelijke lijst, hoe compleet die ook geprobeerde is te maken, zal oneindig veel lacunes vertonen. Einde bewijs.

### To infinity and beyond?

Met Cantors briljante inval hebben we gezien dat er op z'n minst twee soorten oneindig zijn: het aftelbaar oneindige van de gehele getallen en de overaftelbaarheid van de reële lijn. Is het mogelijk om nog grotere verzamelingen te maken?

Een eerste idee zou kunnen zijn om nu het vlak te bekijken, de ruimte  $\mathbb{R}^2$  van paren  $(x, y)$  van reële getallen. Intuïtief lijkt het vlak veel meer punten te bevatten dan een lijn. Dit is echter bedrieglijk. Als we praten over een lijn of een vlak dan bedoelen we veel meer dan zomaar een collectie losse punten. De punten hebben ook allerlei interessante relaties tot elkaar. Ze zijn naaste burens, of juist niet. Al deze relaties worden collectief de *topologie* genoemd, en in onze nogal primitieve vraag van ‘hoeveel’ laten we dit soort aspecten volledig varen.

Het is dan ook zo dat de cardinaliteit van het vlak en de lijn gelijk is. Hoe bizar dat ook mag klinken, we kunnen een bijectie maken tussen de punten van het vlak en de lijn. De afbeelding is niet moeilijk. Laten we voor het gemak een bijectie maken tussen het vierkant en een lijnstuk. Neem een punt in het vierkant. Dit wordt gegeven door een paar getallen  $(x, y)$  met  $0 < x, y < 1$ . Deze getallen hebben ieder een decimale ontwikkeling, bijvoorbeeld

$$\begin{aligned}x &= 0,1171661719919911\dots \\y &= 0,9465729565873022\dots\end{aligned}$$

Aan dit paar getallen  $(x, y)$  gaan we nu één reëel getal  $z$  toevoegen. We doen dat door de decimale expansie van  $x$  te gebruiken voor de oneven decimalen van  $z$  en soortgelijk de expansie van  $y$  te gebruiken voor de even decimalen van  $z$ . De twee reeksen van  $x$  en  $y$  worden dus in elkaar geritst, zoals op de autobaan we van twee rijbanen naar één rijbaan overgaan<sup>2</sup>. In ons voorbeeld vinden we dus dat

$$z = 0,191476156762197516\dots$$

Omgekeerd kunnen we een getal zoals  $z$  splitsen in twee reële getallen door alleen de even of oneven decimalen te lezen. Het moet wel duidelijk zijn dat deze afbeelding de getallen van de lijn op een volledig willekeurige manier verstrooit over het vlak. Uiteindelijk zullen de punten van de lijn het vlak overdekken, maar de natuurlijke ordening op de lijn (groter en kleiner) is helemaal verwoest. Twee getallen die dicht bij elkaar liggen op de lijn kunnen zeer ver van elkaar af komen te liggen in het vlak.

Op dezelfde manier vinden dat ook het aantal punten in de drie- of hogerdimensionale ruimte<sup>3</sup> de cardinaliteit van  $\mathbb{R}$  blijft houden. Hoe komen we daar voorbij? Niet door naar hogere dimensies te gaan, maar wat dan?

### Cantors schilderijtentoonstelling

In het diagonaalargument van Cantor zit een prachtige logica die we nog niet goed hebben duidelijk gemaakt. Laten we die nu naar boven brengen, zeker

<sup>2</sup>In formules:  $(z)_{2n-1} = (x)_n$  en  $(z)_{2n} = (y)_n$ .

<sup>3</sup>Voor de fijnproevers, zelfs een ruimte van (aftelbaar) oneindig veel dimensies heeft de cardinaliteit van  $\mathbb{R}$ .

omdat we Cantors argument nogmaals, nauwelijks verhuld, tegen zullen komen als we Turings werk over de onbeslisbaarheid van de wiskunde gaan bespreken in hoofdstuk X.

Hiervoor is het beter in het binair stelsel te werken, dat wil zeggen een getalstelsel met alleen de cijfers 0 en 1. Het is geen enkel probleem getallen in dit stelsel op te schrijven. Zo is bijvoorbeeld

$$1/4 = 0,01.$$

en ons favoriete voorbeeld van een reëel getal in het interval  $(0,1)$  ziet er nu uit als

$$\pi/4 = 0,110010010000111111011010101000\dots$$

We kunnen nu iedere stap van Cantors bewijs herhalen in dit nieuwe stelsel. Het enige verschil is dat de matrix waarvan we uiteindelijk de diagonaal beschouwen opgebouwd is uit alleen 0-en en 1-en.

Maar deze nieuwe notatie brengt een conceptueel voordeeltje. Er is nu een andere manier om naar een reëel getal  $x$  te kijken. De  $n$ -de ‘decimaal’  $(x)_n$  is nu of 0 of 1. Dat wil zeggen voor ieder natuurlijk getal  $n$  moeten we een binaire keuze maken. We krijgen een 0 of een 1 op de  $n$ -de plaats in de binaire ontwikkeling. Bekijk nu die posities  $n$  waarvoor dit cijfer een 1 is. In het bovenstaand voorbeeld van  $x = \pi/4$  vinden we zo de volgende verzameling van waarden van  $n$

$$\{1, 2, 5, 8, 13, 14, 15, 16, \dots\}$$

omdat er 1-en staan op de eerste, tweede, vijfde, achtste, etc. plaats. Dit geeft een deelverzameling van  $\mathbb{N}$ . Omgekeerd kunnen we met iedere deelverzameling van  $\mathbb{N}$  een reëel getal  $x$  construeren. Het heeft alleen een 1 op de  $n$ -de plaats als  $n$  een element van de deelverzameling is. Op alle andere plaatsen staat een nul. Daarmee hebben we een volstrekt nieuwe interpretatie gevonden van een reëel getal. We kunnen dat ook opvatten als een deelverzamelingen van  $\mathbb{N}$ . Daarmee is de verzameling  $\mathbb{R}$  van reële getallen geïnterpreteerd als de verzameling van deelverzamelingen van  $\mathbb{N}$ . Dit heet technisch gesproken de *machtsverzameling* van  $\mathbb{N}$ , notatie  $P(\mathbb{N})$ .

We kunnen daarmee de stap van  $\mathbb{N}$  naar  $\mathbb{R}$ , waarmee we ons van het kleinste niveau van oneindig naar de overtreffende trap hebben getild, opvatten als de overgang van de verzameling  $\mathbb{N}$  naar de machtsverzameling.

Een machtsverzameling is niet zo’n vreemd object. Stel dat we met een eindige groep mensen te maken hebben. Dan bestaat de machtsverzameling uit alle mogelijke ensembles die we uit die groep kunnen samenstellen, alle mogelijke combinaties die een team kunnen vormen. Dat kan variëren van niemand (de lege verzameling) tot iedereen (de verzameling zelf), en ieder ander mogelijke combinatie daartussen in. Als de groep uit  $n$  personen bestaat dan zijn er  $2^n$

mogelijke deelverzamelingen. Namelijk, voor ieder persoon moeten we beslissen of die wel of niet onderdeel van de groep zal zijn. Dat geeft

$$\underbrace{2 \times 2 \times 2 \cdots \times 2}_n = 2^n$$

mogelijkheden. We kunnen dus nu abstract de cardinaliteit van de reële lijn schrijven als

$$|\mathbb{R}| = 2^\infty.$$

Nu we Cantors argument in deze ruimte zin hebben geformuleerd en begrepen, kunnen we de truc gaan herhalen en grotere en grotere verzamelingen maken door de steeds de machtsverzameling te nemen van de voorafgaande stap. Op deze wijze kunnen we voorbij de cardinaliteit van  $\mathbb{R}$  komen. De volgende stap is namelijk de verzameling van alle deelverzamelingen van de reële lijn. Om zo'n deelverzameling te geven moeten we van ieder punt  $x$  in  $\mathbb{R}$  aangeven of deze 'in' of 'uit' is. Dat kunnen we doen met een functie  $f(x)$  die de waarde 0 of 1 aanneemt. De deelverzameling bestaat dan uit alle punten  $x$  met  $f(x) = 1$ . Anders gezegd, de verzameling van alle afbeeldingen

$$f : \mathbb{R} \rightarrow \{0, 1\}.$$

heeft een cardinaliteit groter dan  $\mathbb{R}$ .

We kunnen ons dit nog wat plastischer voorstellen als we in plaats van de lijn het vlak nemen. Een deelverzameling kan nu opgevat worden als een voorschrift op de punten van het vlak wit of zwart te kleuren. Daarmee krijgen we een (oneindig verfijnde) tekening. De volgende stap in onze reeks oneindigheden is dus de verzameling van alle schilderijen, met oneindig fijne details<sup>4</sup>.

Wat moeten we ons bij de volgende stap voorstellen? Wel, nu hebben we te maken met een deelverzameling van alle mogelijke schilderijen. Dat wil zeggen een tentoonstelling. De verzameling van alle mogelijke mathematische schilderijententoonstellingen is een mooie metafoor voor de volgende trap van oneindigheid!

---

<sup>4</sup>Bijna al deze schilderijen zullen zeer abstract zijn!